Aula 16

Caracterização dos geradores de C_0-semigrupos

Lema 1 Seja A tal que $\rho(A) \supseteq (0,\infty)$. Se $\|\lambda^n R_\lambda(A)^n\| \leq M$ para $\lambda > 0$ e $n = 1, 2, \dots$ $\Rightarrow$ existe a norma $|\cdot|$ em E equivalente a norma inicial $\|\cdot\|$ e $\|x\| \leq |x| \leq M\|x\|$, $x \in E$ e

$$|\lambda R_\lambda(A) x| \leq |x|, \ x \in E, \lambda > 0$$

Demonstração Seja $\mu > 0$ e $\|x\|_\mu = \sup_{n \geq 0} \|\mu^n R_\mu(A)^n x\|$

$\Rightarrow \|x\| \leq \|x\|_\mu \leq M\|x\|$ (1) (já que para $n=0$: $\mu^0 R_\mu(A)^0 x = x$)

e $\|\mu R_\mu(A)\|_\mu \leq 1$ (2) (De fato, $\sup_{n\geq 0} \|\mu^n R_\mu(A)^n(\mu R_\mu(A) x)\| \leq$
$\leq \sup_{n \geq 0} \|\mu^n R_\mu(A)^n x\|$)

Temos $\|\lambda R_\lambda(A)\|_\mu \leq 1$, $0 < \lambda \leq \mu$. (3) De fato,

se $y = R_\lambda(A)x \Rightarrow y = R_\mu(A)(x - (\mu - \lambda)y)$ e

$\|y\|_\mu \underset{(2)}{\leq} \frac{1}{\mu}\|x\|_\mu + (1 - \frac{\lambda}{\mu})\|y\|_\mu \Rightarrow \lambda \|y\|_\mu \leq \|x\|_\mu \Rightarrow$

$\|\lambda R_\lambda(A) x\|_\mu \leq \|x\|_\mu \Rightarrow \|\lambda R_\lambda(A)\| \leq 1$

De (1) e (3) segue $\|\lambda^n R_\lambda(A)^n x\| \leq \|\lambda^n R_\lambda(A)^n x\|_\mu \leq \|x\|_\mu$
para $0 < \lambda \leq \mu$ (4)

Pegando $\sup_{n \geq 0}$, obtemos $\|x\|_\lambda \leq \|x\|_\mu$, $0 < \lambda \leq \mu$.
O limite existe como $\|x\|_\mu$ é crescente e limitada

Definimos $|x| = \lim_{\mu \to \infty} \|x\|_\mu \underset{(1)}{\Rightarrow} \|x\| \leq |x| \leq M\|x\|$

De (4) segue $\|\lambda R_\lambda(A) x\|_\mu \leq \|x\|_\mu \xrightarrow[\mu \to \infty]{}$

$$|\lambda R_\lambda(A) x| \leq |x|$$

Teorema 1 A é gerador inf-l do C_0-semigrupo $T(t)$ satisfazendo $\|T(t)\| \le M$ $(M \geq 1)$ sse

1) A for fechado e $\overline{D(A)} = E$

2) $\rho(A) \supseteq (0,\infty)$ e $\|R_\lambda(A)^n\| \le \frac{M}{\lambda^n}$, $\lambda > 0$, $n = 1, 2, \dots$

Demonstração Sejam $T(t)$ C_0-semigr. em E e A o gerador dele. Suponha que a norma de E foi trocada por uma outra equivalente $\Rightarrow$ os fatos que $T(t)$ é C_0-semigrupo, A é gerador do $T(t)$ e A é fechado ficam inalterados.

- Seja A um gerador do C_0-semigr. $T(t)$ com $\|T(t)\| \le M$.
Define $|x| = \sup_{t \geq 0} \|T(t)x\| \Rightarrow \|x\| \le |x| \le M\|x\|$.
Além disso $|T(t)x| = \sup_{s \geq 0} \|T(s)T(t)x\| \le \sup_{s \geq 0} \|T(s)x\| = |x|$
$\Rightarrow$ $T(t)$ é C_0-semigr. de contrações em E com a norma $|\cdot|$. $\Rightarrow$ do Teorema de Hille-Yosida segue que A é fechado, $\overline{D(A)} = E$, e $|R_\lambda(A)| \le \frac{1}{\lambda}$, $\lambda > 0$.
Logo, $\|R_\lambda(A)^n x\| \le |R_\lambda(A)^n x| \le \lambda^{-n}|x| \le M\lambda^{-n}\|x\| \Rightarrow$ as condições 1) e 2) são necessárias.
- Suponha que 1) e 2) valem. Por Lema 1, existe uma norma $|\cdot|$ tal que $\|x\| \le |x| \le M\|x\|$ e $|\lambda R_\lambda(A)x| \le |x|$, $\lambda > 0$. Considerando E com $|\cdot|$, obtemos A fechado e densamente definido com $\rho(A) \supseteq (0,\infty)$ e $|R_\lambda(A)| \le \lambda^{-1}$, $\lambda > 0$. Logo por Teorema de Hille-Yosida, A é gerador inf-l do C_0-semigrupo das contrações em E com a norma $|\cdot|$. Voltando à norma inicial $\|\cdot\|$, obtemos que A é de novo gerador inf-l de $T(t)$

e $\|T(t)x\| \le |T(t)x| \le |x| \le M\|x\| \Rightarrow$
$\|T(t)\| \le M \Rightarrow$ 1) e 2) são condições suficientes.

Observação Se $T(t)$ é C_0-semigrupo em $E \Rightarrow$ por Teorema 2 da aula 13 $\Rightarrow \exists M \ge 1$ e $\omega \ge 0$ tal que $\|T(t)\| \le M e^{\omega t}$.
Considere C_0-semigrupo $S(t) = e^{-\omega t} T(t) \Rightarrow \|S(t)\| \le M$ e A é gerador inf-l do $T(t)$ <u>sse</u> $A - \omega I$ é gerador inf-l de $S(t)$. Logo do Teorema 1 obtemos

Teorema 2 A é gerador infinitesimal do C_0-semigrupo $T(t)$ satisfazendo $\|T(t)\| \le M e^{\omega t}$ <u>sse</u>

1) A é fechado e $\overline{D(A)} = E$
2) $\rho(A) \supseteq (\omega, \infty)$ e $\|R_\lambda(A)^n\| \le \dfrac{M}{(\lambda-\omega)^n}$, $\lambda > \omega$, $n = 1, 2, \dots$

Lema 2 Seja A gerador inf. do C_0-semigrupo $T(t)$ em E. Se A_λ é aproximação de Yosida
$(A_\lambda = \lambda A R_\lambda(A) = \lambda^2 R_\lambda(A) - \lambda I) \Rightarrow T(t)x = \lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda} x$

Demonstração. Suponha primeiro que $\|T(t)\| \le M$.
Seja $|x| = \sup\limits_{t\ge 0} \|T(t)x\| \Rightarrow |T(t)| \le 1 \Rightarrow$ do Corolário na p. 5 da aula 14, temos $|e^{tA_\lambda} x - T(t)x| \to 0$ como $|\cdot|$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes, $\|e^{tA_\lambda} x - T(t)x\| \to 0$

- Se $\|T(t)\| \le M \cdot e^{\omega t}$, $\omega \le 0 \Rightarrow \|T(t)\| \le M \Rightarrow$ o resultado vale.
- Suponha que $\|T(t)\| \le M \cdot e^{\omega t}$, $\omega > 0$.

Observe que $\|e^{tA_\lambda}\|$ é limitada para $\lambda > 2\omega$.
De fato, $\|e^{tA_\lambda}\| = \|e^{(\lambda^2 R_\lambda(A) - \lambda I)t}\| = e^{-\lambda t} \|e^{\lambda^2 R_\lambda(A) t}\| \le$
$$\le e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} t^k \|R_\lambda(A)^k\|}{k!} \le e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} t^k}{k!} \cdot M \cdot \frac{1}{(\lambda-\omega)^k} \le$$

$\leq M e^{t(-\lambda + \frac{\lambda^2}{\lambda-\omega})} = M \cdot e^{t \cdot \frac{\omega\lambda}{\lambda-\omega}} \leq M e^{2\omega t}$ (como $\frac{\omega\lambda}{\lambda-\omega} < 2\omega$)

Agora consideremos $S(t) = e^{-\omega t} T(t)$ com gerador inf-l $A - \omega I$ $\Rightarrow$ da primeira parte da demonstração temos

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{t(A-\omega I)_\lambda + \omega t} x \quad , x \in E \qquad (4)$$

(de fato $\|S(t)\| \leq M$ e $S(t) = \lim_{\lambda\to\infty} e^{t(A-\omega I)_\lambda} x$)

Não é difícil ver que $(A - \omega I)_\lambda + \omega I = A_{\lambda+\omega} + H(\lambda)$,

onde $H(\lambda) = 2\omega I + \omega(\omega + 2\lambda) R_{\lambda+\omega}(A) =$
$= \omega[\omega R_{\lambda+\omega}(A) - 2 A R_{\lambda+\omega}(A)]$. Observando que
$\|R_{\lambda+\omega}\| \leq \frac{M}{\lambda}$, $\lambda > 0$, obtemos $\|H(\lambda)\| \leq 2\omega +$
$+ \omega(\omega + 2\lambda) \frac{M}{\lambda}$ e para $x \in D(A)$:

$$\|H(\lambda)x\| \leq M \lambda^{-1} (\omega^2 \|x\| + 2\omega \|Ax\|) \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0$$

Usando $\|e^{tH(\lambda)} x - x\| \leq t e^{t\|H(\lambda)\|} \|H(\lambda)x\|$, concluímos
(isso segue da $e^{tH(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n H(\lambda)^n}{n!}$)

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{tH(\lambda)} x = x \quad , x \in E \qquad (5)$$

Finalmente $\|e^{tA_\lambda} x - T(t)x\| \leq \|e^{tA_\lambda + tH(\lambda-\omega)} x - T(t)x\| +$
$+ \|e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\lambda + tH(\lambda-\omega)}\| \underset{\lambda=\mu+\omega}{\leq} \|e^{tA_{\mu+\omega} + tH(\mu)} - T(t)x\| +$

$+ \|e^{tA_{\mu+\omega}}\| \|e^{tH(\mu)} x - x\| \xrightarrow[\mu\to\infty]{(4)+(5)} 0$ e
(ou $\lambda\to\infty$)

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda} x = T(t)x.$$

Teorema 3 (principal) Seja A com $\overline{D(A)} = E$ e $\rho(A) \neq \phi \Rightarrow$ o problema de Cauchy $\begin{cases} u'(t) = Au(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$ (*)

possui uma única solução da classe $C^1([0,\infty), E)$ para todo $u_0 \in D(A)$ sse A for gerador inf.-l do C_0-semigrupo.

Demonstração. Suficiencia foi mostrada em Prop. 2, aula 13.

- Agora suponha que $\forall\, u_0 \in D(A)$ o problema (*) possui uma única solução $u(t) = u(t,u_0) \in C^1([0,\infty), E)$.

Como $\rho(A) \neq \phi \Rightarrow A$ é fechado $\Rightarrow [D(A)]$ é espaço de Banach. Consideremos esp. de Banach $E_{t_0} = C([0,t_0],[D(A)])$ das funsões continuas $f:[0,t_0] \to [D(A)]$ com $\|f\|_{E_{t_0}} = \sup\limits_{[0,t_0]} \|f(t)\|_A$.

Seja o mapeamiento $S: [D(A)] \to E_{t_0}$ definido por $Su_0 = u(t,u_0)$, $0 \leq t \leq t_0$. Pela linearidade de (*), unicidade da solução, é facil ver que S é linear e bem-definido em $[D(A)]$.

Mostremos que S é fechado. Seja $u_0^n \in [D(A)]$ tais que

$$\begin{cases} u_0^n \to u_0 \text{ em } [D(A)] \\ Su_0^n \to y \text{ em } E_{t_0} \end{cases}$$

$\left(\sup\limits_{[0,t_0]} \left\{ \|u(t,u_0^n) - y(t)\| + \|A(u(t,u_0^n) - y(t))\| \right\} \to 0 \right)$

logo temos $u(t,u_0^n) = u_0^n + \int_0^t Au(\tau,u_0^n)\,d\tau$ (é só integrar $u'(t) = Au(t)$)

$$\underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \quad y(t) = u_0 + \int_0^t Ay(\tau)\,d\tau \underset{\substack{\text{pela unicidade} \\ \text{do solução}}}{=} u(t,u_0) = Su_0 \Rightarrow$$

S é fechado. Pro Teor. do grafico fechado S é limitado ou seja $\|Su_0\|_{E_{t_0}} = \sup\limits_{[0,t_0]} \|u(t,u_0)\|_A \leq C\|u_0\|_A$ (6)

Agora definimos o mapeamento (6)
$T(t): [D(A)] \to [D(A)]$ pelo $T(t)u_0 = u(t,u_0)$. Da unicidade de solução segue que $T(t)$ é semigrupo.
De (6) segue que $T(t)$ é uniformemente limitado para $0 \le t \le t_0$. O semigrupo $T(t)$ pode ser extendido para $[0,\infty)$ como $T(t)x = T(\underbrace{t - nt_0}_{\delta})\, T(t_0)^n x$,
$nt_0 \le t < (n+1)t_0 \Rightarrow \| T(t) \| = \| T(t-nt_0)\, T(t_0)^n \| \le$
$\le C^{n+1} \le C \cdot C^{\frac{t}{t_0}} = C e^{\omega t}$, onde $\omega = t_0^{-1} \log C$
(estimativa da norma do op-r T em $[D(A)]$) (7)

Agora mostremos que $T(t)Ay = AT(t)y$, $y \in D(A^2)$
(Já que $D(T(t)) = D(A)$)
Seja $v(t) = y + \int_0^t u(s, Ay)\, ds \Rightarrow$
$v'(t) = u(t, Ay) = Ay + \int_0^t \underbrace{\frac{d}{ds} u(s,Ay)}_{= Au(s,Ay)}\, ds = A\left(y + \int_0^t u(s,Ay)\, ds\right)$
$= Av(t)$.
Como $v(0) = y$, pela unicidade da solução de (*)
$v(t) = u(t,y) \Rightarrow Au(t,y) = v'(t) = u(t, Ay)$ ou seja
$AT(t)y = T(t)Ay$.
Mostremos que $\overline{D(A^2)} = E$. Sabemos que $\overline{D(A)} = E$
e $\exists \lambda \in \rho(A)$. Seja $y \in D(A) \Rightarrow \exists x \in E$ tal que
$R_\lambda(A)x = y \Rightarrow \exists \{x_n\} \subset D(A)$ tal que $x_n \to x$.
Temos $x_n = (\lambda - A)y_n$ ($y_n \in D(A^2)$) e $y_n = R_\lambda(A)x_n \Rightarrow$

$\|y - y_n\| \le \|R_\lambda(A)\| \, \|x_n - x\| \to 0$.
Finalmente seja $\tilde{y} \in E$ e $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \tilde{y}_\varepsilon \in D(A)$
tal que $\|\tilde{y} - \tilde{y}_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{2}$ e pelas considerações acima
$\exists \hat{y}_\varepsilon \in D(A^2)$ tal que $\|\tilde{y}_\varepsilon - \hat{y}_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$
$\|\tilde{y} - \hat{y}_\varepsilon\| < \varepsilon \Rightarrow \overline{D(A^2)} = E$.

Agora seja $\lambda_0 \neq 0$ tal que $\lambda_0 \in \rho(A)$ e $y \in D(A^2)$

Se $x = (\lambda_0 - A)y \underset{(7)}{\Rightarrow} T(t)x = (\lambda_0 I - A)T(t)y \Rightarrow$

$\|T(t)x\| = \|(\lambda_0 I - A)T(t)y\| \leq C_1 \|T(t)y\|_A \leq C_2 e^{\omega t}\|y\|_A$

Mas $\|y\|_A = \|y\| + \|Ay\| \leq C_3 \|x\| \Rightarrow$

$\|T(t)x\| \leq C_3 e^{\omega t}\|x\|$ (estimativa com norma do E!)

Usando $\overline{D(A^2)} = E$ e $R(\lambda_0 - A) = E$, podemos estender $T(t)$ ao todo E pela continuidade com $\|T(t)x\| \leq C_3 e^{\omega t}\|x\|$ $\forall x \in E$. Logo $T(t)$ é C_0-semigrupo em E. Mostremos que A é gerador inf-l de $T(t)$. Suponha que A_1 é gerador de $T(t)$

Se $x \in D(A) \Rightarrow T(t)x = u(t,x) \Rightarrow$

$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x, \; t \geq 0$ pela definição ($u(t,x)$ é solução de (*))

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(T(t)x)|_{t=0} = Ax \Rightarrow A_1 \supseteq A$ $\left(\begin{matrix} D(A) \subseteq D(A_1) \text{ e} \\ A_1 \restriction D(A) = A \end{matrix}\right)$

Seja $Re\lambda > \omega$ e $y \in D(A^2) \underset{(7)}{\Rightarrow} e^{-\lambda t} A T(t) y = e^{-\lambda t} T(t) A y =$

é necessário para integração

$= e^{-\lambda t} T(t) A_1 y$. (8)

Lembre da demonstração do T. de Hille-Yosida

$R_\lambda(A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\,dt$, $x \in E$ $\Rightarrow$ integrando (8) em $(0,\infty)$ obtemos $AR_\lambda(A_1)y = R_\lambda(A_1)A_1 y$.

Mas $A_1 R_\lambda(A_1)y = R_\lambda(A_1)A_1 y \Rightarrow AR_\lambda(A_1)y = A_1 R_\lambda(A_1)y$,

$\forall y \in D(A^2)$. (9)

Mostremos (9) para $\forall y \in E$: Seja $y \in E \Rightarrow$

$\exists \{y_n\} \in D(A^2)$ tal que $y_n \to y$ em E.

$\Rightarrow R_\lambda(A_1)y_n \to R_\lambda(A_1)y$ (como $R_\lambda(A_1)$ é limitado) (8)

e $A_1R_\lambda(A_1)y_n \to A_1R_\lambda(A_1)y$ (como $A_1R_\lambda(A_1)$ é limitado)

Do outro lado $\begin{cases} R_\lambda(A_1)y_n \to R_\lambda(A_1)y \\ A\underbrace{R_\lambda(A_1)y_n}_{} \to A_1R_\lambda(A_1)y \end{cases} \Rightarrow$

$A_1R_\lambda''(A_1)y_n$

Como A é fechado, $AR_\lambda(A_1)y = A_1R_\lambda(A_1)y$, $\forall y \in E$

$\Rightarrow D(A) \supseteq R(R_\lambda(A_1)) = D(A_1) \Rightarrow A_1 \subseteq A \Rightarrow$

$A_1 = A$.

C_0-grupos

Def 1 Seja E um esp. de Banach. A família uniparamétrica $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \subset B(E)$ é dita <u>C_0-grupo</u>

se 1) $T(0) = I$, $T(t+s) = T(t)\cdot T(s)$, $-\infty < t, s < \infty$.

2) $\lim\limits_{t\to 0} T(t)x = x$, $x \in E$.

Def 2 A definido por $D(A) = \{x \in E : \exists \lim\limits_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t}\}$

e $Ax = \lim\limits_{t\to 0}\frac{T(t)x - x}{t}$ é dito <u>gerador infinitesimal</u> do C_0-grupo $T(t)$.

Observação É fácil ver que $T_+(t) = T(t)$, $t \geq 0$ e $T_-(t) = T(-t)$, $t \leq 0$ são C_0-semigrupos com os geradores A e $-A$. Reciprocamente, se A e $-A$ são geradores de C_0-semigrupos $T_+(t)$ e $T_-(t)$ $\Rightarrow$ A é gerador do grupo $T(t)$ dado por

$$T(t) = \begin{cases} T_+(t), & t \geq 0 \\ T_-(-t), & t \leq 0. \end{cases}$$

Teorema 4 A é gerador de um C_0-grupo $T(t)$ satisfazendo $\|T(t)\| \le Me^{\omega|t|}$ sse

1) A é fechado e $\overline{D(A)} = E$

2) $\{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| > \omega\} \subseteq \rho(A)$ e para $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| > \omega\}$

$$\|R_\lambda(A)^n\| \le M(|\lambda| - \omega)^{-n},\ n = 1, 2, \dots$$

Demonstração ($\Rightarrow$) A e $-A$ são geradores dos C_0-semigrupos $T_\pm(t)$ tais que $\|T_\pm(t)\| \le Me^{\omega t}$, $t \ge 0 \Rightarrow$ A é fechado e $\overline{D(A)} = E$, e para $\lambda > \omega$.

$\|R_\lambda(A)^n\| \le M(\lambda - \omega)^{-n}$, $n = 1, 2, \dots$ Além disso

$\|R_{-\lambda}(-A)^n\| \le M(-\lambda - \omega)^{-n}$, $n = 1, 2, \dots$ para $-\lambda > \omega$.

Observando que $R_\lambda(A) = -R_{-\lambda}(-A) \Rightarrow$

$\|R_\lambda(A)^n\| \le M(-\lambda - \omega)^n$, $-\lambda > \omega \Rightarrow$

$\|R_\lambda(A)^n\| \le M(|\lambda| - \omega)^n$, $|\lambda| > \omega$.

($\Leftarrow$) De 1) e 2) segue que A e $-A$ são geradores dos C_0-semigr. $T_+(t)$ e $T_-(t)$ tais que $\|T_\pm(t)\| \le Me^{\omega t}$

Observe que $T_-(t)$ e $T_+(t)$ comutam já que as aproximações e^{tA_λ} e e^{-tA_μ} comutam e $T_+(t)x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda}x$

$T_-(t)x = \lim_{\mu \to \infty} e^{-tA_\mu}x$. Se $W(t) = T_+(t)T_-(t) \Rightarrow W(t)$ é C_0-semigrupo, $t \ge 0$. Para $x \in D(A) = D(-A) \Rightarrow$

$$\frac{W(t)x - x}{t} = T_-(t)\frac{T_+(t)x - x}{t} + \frac{T_-(t)x - x}{t} \xrightarrow[t \downarrow 0]{} Ax - Ax = 0$$

como derivada é nula

$\Rightarrow$ para $x \in D(A)$ temos $W(t)x = x$. $(W(t)x = W(0)x)$ Como $\overline{D(A)} = E$ e $W(t) \in B(E)$, obtemos $W(t) = I$ $\Rightarrow$

$T_-(t) = T_+(t)^{-1}$. Definimos $T(t) = \begin{cases} T_+(t), & t \ge 0 \\ T_-(-t), & t \le 0 \end{cases}$

$\Rightarrow T(t)$ é C_0 - semigrupo tal que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega|t|}$

Lema 3 Seja $T(t)$ um C_0-semigrupo. Se $\forall t > 0$ existir $T(t)^{-1} \in B(E) \Rightarrow S(t) = T(t)^{-1}$ é C_0-semigrupo com gerador $-A$. Além disso se $U(t) = \begin{cases} T(t), & t \geq 0 \\ T(-t)^{-1}, & t \leq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow U(t)$ é C_0 - grupo.

Demonstração A propriedade de semigrupo é óbvia já que $S(t+s) = T(t+s)^{-1} = (T(t)T(s))^{-1} = T(s)^{-1}T(t)^{-1} = S(s)S(t)$. Para mostrarmos continuidade forte do $S(t)$. Para $s > 0$ temos $R(T(s)) = E$. Seja $x \in E$ e $s > 1 \Rightarrow \exists y \in E$ tal que $T(s)y = x \Rightarrow$ para $t < 1$ temos

$$\|T(t)^{-1}x - x\| = \|T(t)^{-1}T(t)T(s-t)y - T(s)y\| =$$
$$= \|T(s-t)y - T(s)y\| \xrightarrow[t \downarrow 0]{} 0 \Rightarrow$$

$S(t)$ é fortemente continuo. Finalmente, para $x \in D(A)$ temos $\lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)^{-1}x - x}{t} = \lim_{t \downarrow 0} T(t)\frac{T(t)^{-1}x - x}{t} =$

$= \lim_{t \downarrow 0} \frac{x - T(t)x}{t} = -Ax \Rightarrow -A$ é gerador inf-l de $T(t)^{-1}$